es subespacio

1.3) Para que sean subespacios deben cumplir:

I) $\tilde{0} \in S$

II) ~~0~~ $v, w \in S \rightarrow v+w \in S$

III) $\lambda \in k,\ v \in S \rightarrow \lambda v \in S$

a) Para cada $[a_1\ a_2 \dots a_m]^T \in \mathbb{K}^m$ el conjunto:

$$\{[x_1\ x_2 \dots x_m]^T \in \mathbb{K}^m : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = 0\}$$

I) $0_{\mathbb{K}^m} \in S$ ya que $a_1 . 0 + a_2 . 0 + \dots + a_m . 0 = 0$ ✓

II) Tomo $\vec{v} = [x_1\ x_2 \dots x_m]^T : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = 0$

$w = [y_1\ y_2 \dots y_m]^T : a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_my_m = 0$.

$v+w = [x_1+y_1\ \ x_2+y_2 \dots x_m+y_m]^T : a_1.(x_1+y_1) + a_2.(x_2+y_2) + \dots + a_m(x_m+y_m) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow a_1x_1 + a_1y_1 + a_2x_2 + a_2y_2 + \dots + a_mx_m + a_my_m = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \underbrace{(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m)}_{=0} + \underbrace{(a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_my_m)}_{=0} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow 0 + 0 = 0 \rightarrow 0 = 0$ ✓ $v+w \in S$

(III) Tomo $v=(x_1, x_2, \dots, x_m)$: $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_mx_m=0$.

$\lambda \in K$, $\lambda v=(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m)$: $a_1.(\lambda x_1)+a_2.(\lambda x_2)+\dots+a_m(\lambda x_m)=0 \rightarrow$

$\rightarrow \lambda.\underbrace{(a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_mx_m)}_{=0.}=0 \rightarrow \lambda.0=0 \rightarrow 0=0$ ✓ $\lambda v \in S$

ES SUBESPACIO.

1.36) $\{x \in k^m: Ax=0\}$, $A \in k^{m\times m}$

(I) $\bar{0} \in S$ ya que $A.0=0$ ✓

(II) Tomo $v=x_1$ y $w=x_2$ $\rightarrow$

$\downarrow$ $Ax_1=0$ $\qquad$ $\downarrow$ $Ax_2=0$

$\rightarrow v+w=(x_1+x_2)$: $A.(x_1+x_2)=0 \rightarrow$ Por prop de matrices:

$\underbrace{Ax_1}_{=0}+\underbrace{Ax_2}_{=0}=0 \rightarrow 0+0=0 \rightarrow 0=0$ ✓ $v+w \in S$

(III) Tomo $v=x$, $\lambda \in K \rightarrow \lambda v=\lambda x$: $A.(\lambda x)=0$

$\downarrow$ $Ax=0$

$\downarrow$ Por prop. de matrices:

$\lambda.\underbrace{Ax}_{=0}=0 \rightarrow \lambda.0=0 \rightarrow 0=0$ ✓ $\lambda v \in S$

ES SUBESPACIO

1.3c) $\{f \in C(\mathbb{R}) : \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0\}$

(I) $\bar{0}$ ES ya que $\int_{-1}^{1} 0\,dx = 0$ ✓

(II) Tomo $v = f$: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$

$w = g$: $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = 0$

$\to v+w = (f+g)(x)$: $\int_{-1}^{1} (f+g)(x)\,dx = 0 \to$ Por prop. de funciones: $\to$

$\to \int_{-1}^{1} (f(x) + g(x))\,dx = 0 \to$ Por prop. de integrales $\to \underbrace{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx}_{=0} + \underbrace{\int_{-1}^{1} g(x)\,dx}_{=0} = 0 \to$

$\to 0 + 0 = 0 \to 0 = 0$ ✓ $v+w$ ES.

(III) Tomo $v = f$: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$.

$\lambda \in K$, $\lambda v = \lambda f$: $\int_{-1}^{1} (\lambda f)(x)\,dx = 0 \to$ Por prop. de funciones: $\to$

$\to \int_{-1}^{1} \lambda . f(x)\,dx = 0 \to$ Por prop. de integrales $\to \lambda . \underbrace{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx}_{=0} = 0 \to$

$\to \lambda . 0 = 0 \to 0 = 0$ ✓ λv ES

ES SUBESPACIO

1.3 d) $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$,

$$\left\{ y \in C^{m}(\mathbb{R}) : \frac{d^m y}{dx^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + a_1 . \frac{dy}{dx} + a_0 . y = 0 \right\}$$

(I) $\bar{0}$ ES ya que $\frac{d^m 0}{dx^m} + a_{m-1} . \frac{d^{m-1} 0}{dx^{m-1}} + \dots + a_1 . \frac{d0}{dx} + a_0 . 0 = 0$ ✓

(II) Tomo $v = y_1$: $\frac{d^m y_1}{dx^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + \dots + a_1 . \frac{dy_1}{dx} + a_0 . y_1 = 0$

$w = y_2$: $\frac{d^m y_2}{dx^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + \dots + a_1 . \frac{dy_2}{dx} + a_0 . y_2 = 0$

$v+w = (y_1+y_2)$: $\frac{d^m (y_1+y_2)}{dx^m} + a_{m-1} . \frac{d^{m-1} (y_1+y_2)}{dx^{m-1}} + \dots + a_1 . \frac{d(y_1+y_2)}{dx} + a_0 . (y_1+y_2) = 0$

Por prop. de derivadas:

$$\underbrace{\left(\frac{d^m y_1}{dx^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy_1}{dx} + a_0 y_1\right)}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{d^m y_2}{dx^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy_2}{dx} + a_0 \cdot y_2\right)}_{=0} = 0 \to$$

$\to 0 + 0 = 0 \to 0 = 0$ ✓ $v + w \in S$

III Tomo $v = y$: $\frac{d^m y}{dx^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$

$\lambda \in K$, $\lambda v = \lambda y$: $\frac{d^m (\lambda y)}{dx^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}(\lambda y)}{dx^{m-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{d(\lambda y)}{dx} + a_0 \cdot (\lambda y) = 0$

Por prop de derivadas puedo sacar el escalar afuera y lo saco como factor común:

$$\to \lambda \cdot \underbrace{\left(\frac{d^m y}{dx^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy}{dx} + a_0 y\right)}_{=0} = 0 \to \lambda \cdot 0 = 0 \to 0 = 0$$ ✓ $\lambda v \in S$

ES SUBESPACIO.